УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГООТРАСЛЕВОГО ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ФАКТОРА

М.П. Дымков, Е.И. Шилкина

Белорусский государственный экономический университет, dymkov_m@bseu.by

Многошаговые динамические системы возникают при математическом моделировании различных индустриальных производств и экономических процессов. Примерами таких производств могут быть химико–технологические процессы, сложные наукоемкие технологические линии конвейерного типа, каскадные очистительные сооружения, крупные многоотраслевые и взаимосвязанные производства в рамках национальных экономик и другие.

Ниже приведена двухпараметрическая (2–D) модель многоотраслевого производства, в котором учитывается экологический фактор, когда наряду с процессом производства товаров присутствует процесс уничтожения ущербов в окружающую среду, порождаемых процессом производства. Определенные трудности рассматриваемых математических моделей порождаются естественным требованием неотрицательности используемых параметров и переменных. В данной работе для исследования многошаговых линейных дискретных систем и задач оптимизации используется операторный подход, развитый в [1,2]. Некоторые результаты по теории положительных 1–D и 2–D систем можно найти в книге Т. Качорека [3], новые приемы изучения неотрицательных систем линейных уравнений и их операторных аналогов, возникающих при описании открытых экономических систем типа Леонтьева – Форда [4], изложены в работе [5].

Постановка задачи. В последнее время задача уменьшение ущерба, наносимого окружающей среде вредными отходами, приобрела первостепенное значение для современной экономической деятельности. Поэтому все более актуальными становятся математические модели экономических процессов, в которых наряду с процессом производства товаров присутствует процесс уничтожения ущербов окружающей среде, возникающих при этом производстве. По–видимому, впервые такого типа модели были рассмотрены В. Леонтьевым в 1970 году [4]. Предположим, что:

1) имеется имеется набор товаров (благ), потребляемых потребителями и для производство которых требуется осуществить технологический цикл, состоящий из последовательно выполняемых $s = 1,2,\dots,h$ стадий (или этапов) обработки, т.е. товар считается готовым, если осуществлены все h предписанных стадий;

2) производство благ планируется на длительный срок, так что после завершения текущего –го ($k = 1,2,\dots$) цикла процесс производства возобновляется на следующем $(k+1)$–ом цикле. Длительный срок означает, что $k \to \infty$;

3) на очередной $(s+1)$–ой стадии нового $(k+1)$–го цикла произведенные на предыдущей s – ой стадии текущего цикла блага используются для производства новых благ, для уничтожения ущербов, возникших на предыдущем цикле, и для потребления на текущем $(k+1)$–ом цикле. Далее, возникающие при таком производстве ущербы на s– ой стадии $(k+1)-$го цикла, в свою очередь, состоят, во–первых, из ущербов, получаемых от производства благ текущего $(k+1)-$го цикла, во–вторых, от уничтожения ущербов из предыдущего $k-$го цикла, полученных на –ой стадии, и, в третьих, от неуничтожаемых ущербов, остающихся в окружающей среде;

4) набор благ и ущербов состоит соответственно из n и m штук наименований.

Для математического описания такого производства введем необходимые определения и обозначения. Для каждой пары (k,s), $s = 1,2,\dots,h$; $k = 1,2,\dots$, обозначим через :

1) $x(k,s), = (x_1(k,s), x_2(k,s),\dots,x_n(k,s)) \in \mathbb{R}^n-$ объем произведенных благ (товаров для потребителей) к началу s–ой стадии k–го цикла производства;

2) $y(k,s), = (y_1(k,s), y_2(k,s),\dots,y_m(k,s)) \in \mathbb{R}^m -$ объем ущербов, возникающих в процессе производства и уничтожаемых в системе в начале s–ой стадии k–го цикла производства;

3) $c(k,s), = (c_1(k,s), c_2(k,s),\dots,c_n(k,s)) \in \mathbb{R}^n -$ объем потребляемых благ на –ой стадии в k–ом цикле ;

4) $d(k,s) = (d_1(k,s), d_2(k,s),\dots,d_m(k,s)) \in \mathbb{R}^m -$ объем неуничтожаемых ущербов, остающихся в окружающей среде в результате производства на –ой стадии в k–ом цикле;

5) a_{il} − доля –го типа благ, которая необходима для производства единицы блага i–го типа $(i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, n)$;

6) b^0_{ij}– доля производимых благ –го типа, используемых в процессе уничтожения ущербов j–го типа $(i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m)$;

7) c_{lj} − доля ущерба –го типа, возникающего в процессе производства блага l–го типа $(l = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m)$;

8) d^0_{qj} − доля ущербов –го типа, возникающих в процессе уничтожения ущербов $q-$го типа $(j = 1, \dots, m; q = 1, \dots, m)$.

Введем еще матрицы следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b^0_{11} & b^0_{12} & \dots & b^0_{1m} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ b^0_{n1} & b^0_{n2} & .. & b^0_{nm} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & .. & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} d^0_{11} & d^0_{12} & \dots & d^0_{1m} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ b^0_{m1} & b^0_{m2} & .. & b^0_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом введенных обозначений, а также баланса объемов благ и ущербов, получим следующую многошаговую $2-D$ модель многотраслевого производства, учитывающую экологический фактор:

$$\begin{cases} x(k+1, s+1) = Ax(k+1, s) + B_0 y(k, s) + c(k, s) \\ y(k+1, s) = Cx(k+1, s) + D_0 y(k, s) - d(k, s). \end{cases} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \qquad B_0 \in \mathbb{R}_+^{m\times n}, \qquad C \in \mathbb{R}_+^{m\times m}, \qquad D_0 \in \mathbb{R}_+^{m\times m},$$
$$x(k,s) \ge 0,\ y(k,s) \ge 0,\ c(k,s) \ge 0,\ d(k,s) \ge 0, \quad \forall (k,s). \qquad (2)$$

Начальные данные в (1) имеют вид

$$x(k, 0) = \alpha_{k+1}, \quad k \ge 0; y(0, s) = f_s, \quad s = 1,2, \dots, h. \qquad (3)$$

Одной из исследуемых задач является описание условий на технологические матрицы A, B_0, C, D_0, при которых система уравнений (1) имеет неотрицательное решение (x, y, d) при любом уровне спроса c. Другая задача заключается в изучении вопроса о возможности для заданного уровня спроса c уменьшения объемов ущерба, остающихся в окружающей среде. Другими словами, имеет ли система (1) для заданного уровня спроса c неотрицательное решение вида $(x, y, 0)$ (условия компенсируемости). В работе также обсуждаются линейные задачи оптимизации ущерба при различных ограничениях.

Замечание. Введением соответствующих блочных матриц (операторов) и расширенных векторов (в пространствах последовательностей) указанные модели в принципе можно свести к обобщенному уравнению типа $z = \mathcal{A}z + w$. Однако это сведение не решает вышеупомянутых задач, так как здесь главное препятствие уже заключается в том, что в отличие от модели Леонтьева у вектора w часть компонент, соответствующих производству товаров, неотрицательна, а часть, соответствующая ущербам, неположительна, хотя сам вектор z является неотрицательным.

Список использованных источников:

1. Дымков, М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М.П. Дымков. – Минск: Изд–во БГЭУ, 2005. – 363 с.
2. Dymkov, M. Linear optimal control problems for discrete 2D systems // Mathematical Methods of Operations Research, 1998. vol. 47, № 1, 201–216.
3. Kaczorek, T. Positive 1D and 2D Systems / T. Kaczorek . – Berlin: Springer–Verlag, 2001. – 425 p.
4. Леонтьев, В.В. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. 1972, т.8, вып. 3, сс. 370– 399.
5. Zabreiko, P. Open Leontiev–Ford model // Proceedings of Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. – Minsk: 2007, v. 15, No. 2, pp.15– 26.